## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**Лекция 2**

**2. Дифференциальные уравнения первого порядка**

**п. 2.3 Однородные дифференциальные уравнения**

*Опр. 1. Функция называется* ***однородной функцией n-ого порядка****, если при умножении каждого ее аргумента на произвольное число λ вся функция умножается на , т. е. имеет место равенство*

(1)

*Пример1.* Выясним, является ли однородной функция .

-( λх)( λу)+3.

Равенство (1) выполняется при n=2, следовательно, функция является однородной второго порядка.

*Опр.2. Дифференциальное уравнение вида* (2) *называют* ***однородным дифференциальным уравнением****, если функции**являются однородными функциями одного порядка.*

Если ДУ (2) является однородным уравнением его можно представить в виде , где однородная функция нулевого порядка, т. е. .

Если однородное ДУ записано в виде , то его можно преобразовать к другому виду (3) (примем без доказательства).

Рассмотрим метод решения однородных ДУ. Введем новую переменную

*,* тогда , . Подставляя в уравнение (3) новые выражения получим уравнение ), которое является уравнением с разделяющимися переменными. Находим его общее решение, а затем выполняем обратную замену =. Если возможно решение преобразуют к более простому виду.

***Замечание.*** Если однородное уравнение задано в дифференциальном виде , то его можно свести к виду следующим образом: следует поделить уравнение на , получим уравнение , так как , то получаем уравнения нужного вида, далее решаем его так же ка уравнение (3).

*Пример 2*. Решить уравнение .

Функция является однородной функцией нулевого порядка (=). Применим метод замены, описанный выше. Введем новую переменную *,* где тогда , . Подставляя в уравнение новые выражения, получим уравнение вида

. Сократим дробь на х, далее решаем как уравнение с разделяющимися переменными.

, делим уравнение на , получаем

. Интегрируем: , ,

(для преобразования правой части заменили С на . Далее выполняем обратную замену и преобразуем общее решение.a, a, преобразуем правую часть, получаем окончательный ответ

a. Особых случаев в данном уравнении нет.

Ответ: a.

**п. 2.4 Линейные дифференциальные уравнения.**

**Уравнения Бернулли**

*Опр.*1 ***Линейным дифференциальным уравнением первого порядка*** *называют уравнение, линейное относительно неизвестной функции и её производной. Оно имеет вид*



*где  – известные непрерывные функции.*

Существует два метода решения данного вида уравнений; метод Бернулли и метод Лагранжа. Рассмотрим подробно один из них. С другим можно ознакомится самостоятельно, используя указанную литературу.

Решение данного уравнения будем искать **методом Бернулли** в виде произведения двух функций, зависящих от : . Одну из них можно взять произвольно.

В исходном уравнении вводим замену:



Получаем:



.

В левой части этого равенства группируем слагаемые, содержащие множитель , и выносим его за скобки:

. (1)

Выбираем функцию  такой, чтобы . Решая уравнение , находим функцию .

Подставляем её в уравнение (1), получаем . Разделяя переменные, находим функцию .

Записываем общее решение: .

*Пример 1*. Решить уравнение: .

*Решение*. Это линейное уравнение. Ищем решение в виде:



Получаем



 (2)

Приравниваем выражение в скобках к нулю: .

Решаем полученное уравнение:

.

Подставляем  в уравнение (2), получаем:

 .

Общее решение: 

Ответ: 

*Опр. 2.* ***Уравнения Бернулли*** *– дифференциальные уравнения вида*



*где  – известные, непрерывные функции, а  (при  – линейное уравнение, при  – уравнение с разделяющимися переменными).*

Покажем, что уравнение Бернулли можно привести к линейному. Поделим обе части уравнения Бернулли на :

,

.

Сделаем замену . Тогда

, или .

Получаем:

 – линейное уравнение относительно .

Поэтому уравнение Бернулли можно решать методом Бернулли.

*Пример 2*. Решить уравнение:

.

*Решение*. В данном уравнении вводим замену: 

Получаем:

,

. (3)

Приравниваем выражение в скобках к нулю: .

Решаем полученное уравнение.

        .

Подставляем  в уравнение (3), получаем

.

Общее решение: .

Ответ: .

**п. 2.5 Уравнения в полных дифференциалах**

*Опр. Дифференциальное уравнение вида* *называют* ***уравнением в полных дифференциалах****, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции, т.е..*

Тогда уравнение можно записать в виде , общее решение такого уравнения имеет вид .

Рассмотрим теорему, позволяющую определять, является ли выражение полным дифференциалом некоторой функции.

***Теорема.*** *Для того чтобы выражение , где функции ) и их частные производные непрерывны в некоторой области D плоскости Оху, было полным дифференциалом, необходимо и достаточно выполнение равенства*  (1).

Доказательство теоремы можно посмотреть в литературе 1.

Решение уравнений в полных дифференциалах осуществляется в два этапа.

1 этап. Из условия находим функцию с точностью до произвольной постоянной, которая является функцией переменной у. Покажем как это сделать. .

2 этап. Используем условие

Тогда

Окончательный ответ записываем в виде , т.е.

*Пример.* Решить уравнение .

*Решение.* Проверим, является ли данное уравнение, уравнением в полных дифференциалах. , *)*=

, следовательно, уравнение в полных дифференциалах.

1. (интегрируем, считая у числом).

Тогда .

Ответ: .

Литература:

1. Д. Письменный «Конспект лекций по высшей математике», глава 1, параграф 2 (п.2.2 - ,2.5)
2. Н.Ш. Кремер «Высшая математика для экономистов», глава 12 п. 12.5, 12.6,